Rubrique: logique

Types dans les corps valués

Titre anglais: types in valued fields

Luc Bélair Michel Bousquet

Résumé. L'analyse de Delon des types dans les corps valués devient particulièrement transparente dans le langage des corps valués auquel on ajoute une $\ll$ application coefficient $\gg$. On obtient ainsi une preuve du transfert à la Ax-Kochen-Ershov de la propriété d'indépendance en égale caractéristique zéro.

Abstract. Delon's analysis of types in valued fields becomes especially clear when we add a function symbol for a "coefficient map". In particular we get a proof of the Ax-Kochen-Ershov principle for the independence property in equal characteristic zero.

1 Introduction

Dans [3],[2] Delon donne une analyse des types sur les corps valués henséliens d'égale caractéristique zéro. On peut en déduire un théorème de type Ax-Kochen-Ershov pour la propriété d'indépendance, le cas où le corps des restes est clos par radicaux étant déjà donné dans [3]. Dans cette note, nous indiquons comment cette analyse des types devient particulièrement transparente dans le langage des corps valués auquel on ajoute un symbole de fonction pour une ≪ application coefficient ≫ (voir [5]), c'est-à-dire un homomorphisme du groupe multiplicatif dans le groupe multiplicatif du corps des restes, homomorphisme qui prolonge le passage au reste pour les éléments de valuation nulle. En particulier, on obtient une preuve simple du théorème à la Ax-Kochen-Ershov évoqué ci-dessus (théorème 4.2, corollaire 4.3). Le langage des corps valués L sera le langage à trois sortes, pour le corps de base, le groupe de valuation et le corps des restes, muni de symboles pour la valuation et le passage au reste, avec le langage des anneaux pour le corps de base et le corps des restes, et le langage des groupes abéliens ordonnés pour le groupe de valuation. Pour un corps k , k^x désigne son groupe multiplicatif. Pour un corps valué (K, v), vK désigne son groupe de valuation comme groupe abélien ordonné, $\overline{K}$ son corps des restes et $\overline{x}$ le reste de x si $v(x) \geq 0$. Pour $f : (K, v) \to (L, v)$ un plongement de corps valués, f_v désigne le plongement induit de vK dans vL et f_{res} le plongement induit de $\overline{K}$ dans $\overline{L}$.

2 Application coefficient

Définition 2.1 *Une application coefficient d'un corps valué, disons* (K, v), *est un homomorphisme de* K^x *dans* $\overline{K}^x$, *disons co, tel que* $co(u) = \overline{u}$ *si* $v(u) = 0$.

Exemple 2.2 *(1) Soit* $K = \boldsymbol{C}((T))$, *avec la valuation naturelle : pour* $f = a_N T^N + a_{N+1} T^{N+1} + \ldots$, *avec* $a_N \neq 0$, $v(f) = N$. *L'application définie par* $co(f) = a_N$ *est une application coefficient. (2) Soit* K *le corps des nombres p-adiques avec la valuation p-adique : pour* $a = a_N p^N + a_{N+1} p^{N+1} + \ldots$, *avec* $0 \leq a_i < p$, $a_N \neq 0$, $v(a) = N$. *L'application* $co(a) = a_N$ *est une application coefficient.*

Cette notion apparaît dans [4], elle est utilisée dans [8] puis [5], elle est étudiée dans [6] et [9]. Tout corps valué a une extension élémentaire qui possède une application coefficient (voir [9]).

Lemme 2.3 *([6]) Soit* $(E, v, co)et(F, v, co)$ *des corps valués munis d'une application coefficient. Soit* β *un plongement de* $\overline{E}$ *dans* $\overline{F}$*. Soit* K *un sous-corps de* E *et* i *un plongement de corps valués de* K *dans* F *tel que* $\beta(co(x)) = co(i(x))$*, pour tout* x *dans* K*. Soit* $K \subset L \subset E$ *un corps intermédiaire et* i_L *un plongement de corps valués de* L *dans* F *qui prolonge* i*. Supposons qu'il existe un sous-groupe* G *de* L^x *tel que* $vL = vK + vG$*, et un ensemble de générateurs* H *de* G *tel que* $\beta(co(h)) = co(i_L(h))$*, pour tout* h *dans* H*. Alors on a* $\beta(co(y)) = co(i_L(y))$*, pour tout* y *dans* L*.*

En ajoutant un nouveau symbole co au langage L et les axiomes appropriés, on obtient le langage L_{co} des corps valués munis d'une application coefficient. Le théorème d'élimination relative des quantificateurs sur les éléments de corps valué de Pas entraîne un principe de Ax-Kochen-Ershov dans le langage L_{co} ([8]; voir [5], (3.5)), et aussi une propriété de plongement.

Théorème 2.4 *Soit* $(E, v, co), (F, v, co)$ *des corps valués henséliens munis d'une application coefficient et dont le corps des restes est de caractéristique zéro. Alors (1)* $(E, v, co) \equiv (F, v, co)$ *dans* L_{co} *si et seulement si* $vE \equiv vF$ *et* $\overline{E} \equiv \overline{F}$ *et (2) supposons* $(E, v, co) \subset (F, v, co)$ *dans* L_{co}*, on a* $(E, v, co) \prec (F, v, co)$ *dans* L_{co} *si et seulement si* $vE \prec vF$ *et* $\overline{E} \prec \overline{F}$*.*

Proposition 2.5 *Soit* $(E, v, co), (F, v, co)$ *des corps valués henséliens munis d'une application coefficient et dont le corps des restes est de caractéristique zéro, et tels que* (F, v, co) *est* $\mid E \mid^+$*-saturé. Soit* α *un plongement élémentaire de* vE *dans* vF *et* β *un plongement élémentaire de* $\overline{E}$ *dans* $\overline{F}$*. Soit* K *un sous-corps de* E *et* i *un plongement de corps valués de* K *dans* F *tel que* i_v *et* i_{res} *coïncident avec les rectrictions de* α *et* β*, et* $\beta(co(x)) = co(i(x))$ *pour tout* x *dans* K*. Alors il existe un plongement de corps valués* j *de* E *dans* F *qui prolonge* i *, tel que* j_v *et* j_{res} *coïncident avec* α *et* β*, et* $\beta(co(y)) = co(j(y))$ *pour tout* y *dans* E*.*

Mentionnons que van den Dries montre directement cette proposition sans supposer que les plongements α, β sont élémentaires, ce qui fournit une autre preuve du théorème d'élimination de Pas (voir [6]).

3 Types

Fixons dans le langage L_{co} une théorie complète T de corps valués henséliens dont le corps des restes est un modèle d'une théorie $T_{r,0}$ de corps de caractéristique zéro et dont le groupe de valuation est un modèle d'une théorie T_g de groupes abéliens ordonnés. On donne maintenant une axiomatisation des 1-types sur les modèles dans le langage L_{co}. Cette analyse suit de près celle de Delon (voir [3]). Elle distingue trois familles de types. Considérons une extension de corps valués $(K,v) \prec (M,v)$, $x \in M \setminus K$, et soit $I_K(x) = \{g \in vK : \exists k \in K, v(x-k) = g\}$. Le type $tp(x,K)$ se classe parmi l'une des trois familles suivantes: (1) $I_K(x) = \{v(x-k) : k \in K\}$ et possède un maximum; (2) $I_K(x) = \{v(x-k) : k \in K\}$ et ne possède pas de maximum; (3) $I_K(x) \neq \{v(x-k) : k \in K\}$, et alors $\{v(x-k) : k \in K\} = I_K(x) \cup \{g_0\}$ et $I_K(x) < g_0$.

Théorème 3.1 *Soit (K,v,co) un modèle de T et x dans une extension élémentaire, $x \notin K$.*
(1) Si $tp(x,K)$ appartient à la première famille, alors il est complètement déterminé par deux constantes $a,b \in K, a \neq 0$, telles que $v(ax+b) = 0, \overline{ax+b} \notin \overline{K}$, et par le type $tp(\overline{ax+b}, \overline{K})$.
(2) Si $tp(x,K)$ appartient à la deuxième famille, alors il est complètement déterminé par une suite $(a_\rho; \gamma_\rho)$ indexée par un ensemble bien ordonné, où $a_\rho \in K$, $\gamma_\rho = v(x-a_\rho)$ et (γ_ρ) est cofinale dans $I_K(x)$.
(3) Si $tp(x,K)$ appartient à la troisième famille, alors il est complètement déterminé par une constante $a \in K$ telle que $v(x-a) \notin vK$, par le type $tp(v(x-a), vK)$ et par le type $tp(co(x-a), \overline{K})$.

Démonstration. Soit (M,v,co) une extension élémentaire assez saturée, qu'on pourra ajuster pour obtenir les automorphismes voulus. Identifions x à un élément de M. L'existence des différents paramètres est donnée par Delon.
(1) Supposons $x' \in M$ tel que $tp(x',K)$ appartient aussi à la première famille et tel que $v(ax'+b) = 0, \overline{ax'+b} \notin \overline{K}$ et $tp(\overline{ax'+b}, \overline{K}) = tp(\overline{ax+b}, \overline{K})$. Il existe un $\overline{K}$-automorphisme de $\overline{M}$ qui envoie $\overline{ax+b}$ sur $\overline{ax'+b}$ et l'analyse de Delon assure l'existence de deux corps valués $K_x, K_{x'}$ intermédiaires entre K et M tel que $x \in K_x, x' \in K_{x'}$, $\overline{K_x} = \overline{K_{x'}} = \overline{M}$, $v(K_x) = v(K_{x'}) = vK$, et d'un K-isomorphisme de corps valués φ de K_x sur $K_{x'}$ tel que $\varphi(x) = x'$ (voir

[3], th.1 ; on trouve un exposé détaillé dans [1]). En passant aux hensélisés on peut supposer $K_x, K_{x'}$ henséliens. Alors par le lemme 2.3 , appliqué avec $G = H = \{1\}$, l'isomorphisme φ est nécessairement un isomorphisme pour le langage L_{co} et par le théorème 2.4 on conclut que $tp(x, K) = tp(x', K)$.
(2) Supposons $x' \in M$ tel que $tp(x', K)$ appartient aussi à la deuxième famille pour la même suite $(a_\rho; \gamma_\rho)$. On vérifie directement que la suite (a_ρ) est une suite pseudo-Cauchy de type transcendant dont x et x' sont des pseudo-limites; il existe donc un K-isomorphisme de corps valués $\varphi : K(x) \to K(x')$ tel que $\varphi(x) = x'$ et on a $vK(x) = vK(x') = vK, \overline{K(x)} = \overline{K(x')} = \overline{K}$ (on trouve un exposé détaillé dans [1]). En passant aux hensélisés on peut raisonner comme en (1).
(3) Supposons $x' \in M$ tel que $tp(x', K)$ appartient aussi à la troisième famille pour le même paramètre $a \in K$ et tel que $tp(v(x-a), vK) = tp(v(x'-a), vK)$ et $tp(co(x-a), \overline{K}) = tp(co(x'-a), \overline{K})$. Posons $y = x - a, y' = x' - a$; il suffit de voir que $tp(y, K) = tp(y', K)$. Il existe un vK-automorphisme σ de vM tel que $\sigma(v(y)) = v(y')$ et un $\overline{K}$-automorphisme ρ de $\overline{M}$ tel que $\rho(co(y)) = co(y')$. Comme vK est pur dans vM et $v(y), v(y') \notin vM$ on a $vK(y) = vK \oplus \boldsymbol{Z}v(y), vK(y) = vK \oplus \boldsymbol{Z}v(y')$, et on obtient un K-isomorphisme de corps valués $\varphi_0 : K(y) \to K(y')$ tel que $\varphi_0(y) = y'$. Soit K_0, M_0 des relèvements de $\overline{K}, \overline{M}$ par une section de l'application de passage au reste tels que $K_0 \subseteq M_0$, et $u \in M_0$ tel que $\overline{u} = co(y)$. On obtient un K_0-automorphisme de M_0, disons ρ_0, qui relève ρ et tel que $\overline{\rho_0(u)} = co(y')$. On obtient encore un K-isomorphisme de corps valués $\varphi_1 : K(y, M_0) \to K(y', M_0)$ qui prolonge φ_0 et tel que $\varphi_1(y) = y', \varphi_{1,res}(co(y)) = co(y')$, et on a $v(K(y, M_0)) = v(K(y)) = vK \oplus \boldsymbol{Z}v(y), v(K(y', M_0)) = v(K(y')) = vK \oplus \boldsymbol{Z}v(y'), \overline{K(x, M_0)} = \overline{K(x', M_0)} = \overline{M}$ (voir [2],prop.15; ou [3], lemme 2). Alors par le lemme 2.3, en prenant $H = \{y\}$, φ_1 est aussi un L_{co}-isomorphisme. Posons $K_1 = K(y, M_0), K'_1 = K(y', M_0)$. Notons que la restriction de σ à vK_1 coïncide nécessairement avec $\varphi_{1,v}$. Considérons la structure $(M, v, co, K_1, K'_1, \varphi_1, \sigma, \rho)$. On obtient une sous-structure élémentaire $(K_3, v, co, K_2, K'_2, \varphi_2, \alpha, \beta)$ telle que $\mid K_3 \mid = \mid K \mid$, $K(y) \subseteq K_2 \subseteq K_3$, $K_3 \prec_{L_{co}} M$, $K_2 \prec_{L_{co}} K_1$, $K'_2 \prec_{L_{co}} K'_1$, $\varphi_2 : K_2 \to K'_2$ est un K-isomorphisme dans L_{co} telle que $\varphi_2(y) = y'$, α est un vK-plongement élémentaire de vK_3 dans vM tel que $\alpha \mid_{vK_2} = \varphi_{2,v}$ et $\alpha(v(y)) = v(y')$, et finalement β est un $\overline{K}$-plongement élémentaire de $\overline{K}_3$ dans $\overline{M}$ tel que $\beta \mid_{\overline{K}_2} = \varphi_{2,res}$ et $\beta(co(y)) = co(y')$. Alors par la proposition 2.5 il existe un K-isomorphisme dans le langage L_{co}, disons φ_3 , de K_3 sur une sous-structure élémentaire de

M, qui prolonge φ_2; en particulier $\varphi_3(y) = y'$ et on peut conclure.

4 La propriété d'indépendance

On travaille dans le langage L_{co} avec une théorie complète T de corps valués henséliens de corps de restes de caractéristique zéro comme ci-dessus. Compte tenu du paragraphe précédent l'analyse de Delon des cohéritiers s'applique directement (voir [3]; on trouve un exposé détaillé dans [1]). En appliquant le critère de Poizat pour la propriété d'indépendance par le compte des cohéritiers (voir [10]) on obtient le transfert à la Ax-Kochen-Ershov, qui se ramène aux seuls corps par [7].

Théorème 4.1 *Soit $(K, v, co) \prec (M, v, co)$ des modèles de T et soit $p(x)$ un 1-type sur K, non trivial.*
(1) Si p appartient à la première famille, ses cohéritiers sur M sont les types $q(y)$ tels que $q(y)$ appartient à la même famille avec les mêmes paramètres a, b dans K et $tp(\overline{ay + b}, \overline{M})$ cohérite de $tp(\overline{ax + b}, \overline{K})$.
(2) Si p appartient à la deuxième famille on a deux cas:
(2.1) Si M ne réalise pas p, alors p possède un fils unique sur M, ce fils appartient aussi à la deuxième famille et est déterminé par la même suite $(a_\rho; \gamma_\rho)$ que p.
(2.2) Si M réalise p en x_0, les cohéritiers de p sont les types $q(y)$ tels que $q(y)$ appartient à la troisième famille pour le paramètre x_0, $I_K(p)$ est cofinal dans $I_M(q)$, $tp(v(y - x_0), vM)$ cohérite à gauche de sa restriction à vK, et $tp(co(y - x_0), \overline{M})$ cohérite de sa restriction à $\overline{K}$.
(3) Si p appartient à la troisième famille, ses cohéritiers sur M sont les types $q(y)$ tels que $q(y)$ appartient à la même famille avec le même paramètre a dans K, $tp(v(y - a), vM)$ cohérite de $tp(v(x - a), vK)$ et $tp(co(y - a), \overline{M})$ cohérite de $tp(co(x - a), \overline{K})$.

Théorème 4.2 *Dans le langage L_{co} soit T comme ci-dessus, T possède la propriété d'indépendance si et seulement si $T_{r,0}$ ou T_g la possède.*

Corollaire 4.3 *Dans le langage des corps valués, une théorie de corps valués henséliens de corps de restes de caractéristique zéro possède la propriété d'indépendance si et seulement si la théorie de corps associée au corps de restes la possède.*

References

[1] M. Bousquet, Propriété d'indépendance dans les corps valués, Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal, 1995.

[2] F. Delon, Quelques propriétés des corps valués en théorie des modèles, Thèse d'état, Université Paris VII, 1981.

[3] F. Delon, Types sur $\boldsymbol{C}((X))$, in *Groupe d'Étude de Théories Stables, année 78-79*, Secrétariat mathématique, Institut Henri-Poincaré, Université Pierre et Marie Curie, 1981.

[4] J. Denef, P-adic semi-algebraic sets and cell decomposition, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 369, 1986, pp. 154-166.

[5] L. van den Dries, Analytic Ax-Kochen-Ershov theorems, Contemporary Mathematics, 131, 1992, pp. 379-398.

[6] L. van den Dries, The logic of local fields, notes d'une série d'exposés lors du congrès *Logic, local fields and subanalytic sets*, AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conferences, Amherst, du 28 juin au 4 juillet 1990.

[7] Y. Gurevich et P. Schmitt, Ordered abelian groups do not have the independence property, Transactions of the American Mathematical Society, 284, 1984, pp.171-182.

[8] J. Pas, Uniform p-adic cell decomposition and local zeta function, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 399, 1989, pp. 137-172.

[9] J. Pas, On the angular component map modulo p, Journal of Symbolic Logic , 55, 1990, pp. 1125-1129.

[10] B. Poizat, Théories instables, Journal of Symbolic Logic, 46, 1981, pp. 513-522.